

Stochastik aus der Zeitung:

## Zahlenakrobatik zur Entlarvung von Fälschern

GEORGE SZPIRO, JERUSALEM, NEUE ZÜRCHER ZEITUNG VOM 1. JULI 2009

---

***Zusammenfassung:** Statistische Methoden liefern Anzeichen (aber keine Beweise) für Wahlmanipulation in Iran. Statistische Methoden deuten an, dass bei den Wahlen in Iran nicht alles mit rechten Dingen zugegangen sein könnte. Definitiv beweisen ließe sich das jedoch nur durch eine Nachzählung der Stimmen.*

Immer noch steht die Behauptung im Raum, bei den iranischen Präsidentschaftswahlen sei in großem Umfang gefälscht worden. Auch die partielle Nachzählung von Stimmen hat die Kritiker nicht zum Verstummen gebracht. Mittlerweile fühlen sich auch Statistiker berufen, die Wahlresultate mit ihren Methoden zu überprüfen. Einen eindeutigen Beweis für Wahlfälschungen konnten sie bisher nicht erbringen. Es gibt jedoch Anzeichen dafür, dass die Resultate manipuliert worden sein könnten.

### **Das Gesetz der führenden Ziffer**

Eine statistische Methode zum Nachweis von Fälschungen besteht darin, die Stimmentotale in den einzelnen Wahlkreisen auf ihre Übereinstimmung mit dem sogenannten Benford-Gesetz zu überprüfen. Dieses Gesetz besagt, dass bei einer Sammlung von Daten etwa 30 Prozent der aufgelisteten Zahlen eine 1 als vorderste Ziffer aufweisen sollten, 17,6 Prozent eine führende 2 und so weiter bis zur führenden 9, die bloß in weniger als 5 Prozent der Fälle auftreten sollte. Das Gesetz tritt praktisch in allen wirtschaftlichen und sozialen Datenreihen auf und kann theoretisch gerechtfertigt werden. Somit sollte es auch bei der Auszählung von Stimmen in einer Sammlung von Wahlkreisen Gültigkeit haben. In etwa 30 Prozent der Wahlkreise sollte die Zahl der abgegebenen Stimmen also mit einer 1 beginnen (also zwischen 1000 und 1999 Stimmen, zwischen 10 000 und 19 999 Stimmen usw.).

Bei der Analyse der Resultate aus 366 iranischen Wahlkreisen stellte Boudewijn Roukema von der Nikolaus-Kopernikus-Universität in Polen fest, dass die Gesamtsummen der Stimmen erwartungsgemäß der Benford-Verteilung folgen. Doch bei den Teilsummen für die einzelnen Kandidaten stieß er auf eine Unstimmigkeit. Bei dem chancenlosen Kandidaten Mehdi Karroubi trat in 41 der 366 Wahlkreise eine 7 als führende Ziffer auf, was etwa das Doppelte von dem ist, was man aufgrund der Benford-Verteilung erwarten würde. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Abweichung zufällig auftritt, ist kleiner als 1 Prozent. Besonders bedenklich ist laut Roukema, dass drei dieser Abweichungen ausgerechnet in den bevölkerungsreichsten Wahlkreisen Irans auftraten. Und ausgerechnet in diesen Wahlkreisen ergatterte Ahmadinejad überdurchschnittlich viele Stimmen. Roukema sieht in diesen Tatsachen einen Hinweis für eine Manipulation des Wahlergebnisses, obwohl nicht klar ist, wie diese zustande gekommen sein soll.

Die Analyse ist jedoch nicht ganz stichhaltig, wie Lutz Dümbgen vom Institut für mathematische Statistik der Universität Bern bemerkt, denn sie lässt ein wichtiges Faktum unberücksichtigt. Wahlkreise werden nämlich nicht zufällig festgelegt, sondern haben eine gewisse Idealgröße. Wenn diese zum Beispiel 30 000 bis 40 000 Stimmbürger beträgt, wären – bei einer Wahlbeteiligung zwischen 70 und 80 Prozent – Stimmentotale von 21 000 bis 32 000 besonders häufig, was zum Beispiel ein Übermaß an Stimmentotalen mit führender Ziffer 2 erklären würde. Für einen Kandidaten, der im Durchschnitt ein Viertel der abgegebenen Stimmen erhält, ergäbe sich eine überwiegende Anzahl von Resultaten mit einer führenden 6 oder 7. Somit sind Abweichungen von der Benford-Verteilung ein schlechtes Indiz für Wahlmanipulation. Aus diesem Grund kam schon das auf die Untersuchung von Wahlfälschung spezialisierte Carter-Center nach dem Referendum in Venezuela im Jahre 2004 zu dem Schluss, dass eine Analyse à la Benford wenig zur Aufdeckung von Wahlfälschungen beitragen könne.

Eine weitergehende statistische Kritik an dem iranischen Wahlergebnis stammt von dem Professor für politische Wissenschaften und Statistik Walter Mebane von der Michigan University. Wegen der Problematik der herkömmlichen Benford-Analyse untersuchte der Professor, der sich auf dem Gebiet der «Wahlforensik» einen Namen gemacht hat, nicht die vordersten, sondern die zweitvordersten Ziffern der Wahlergebnisse in den Wahlkreisen. Er verglich sie mit Bezugswerten, die sich aus der gewöhnlichen Benford-Verteilung errechnen lassen, fand aber weder für die Gesamtsummen noch für die Resultate der einzelnen Kandidaten signifikante Abweichungen von den Sollwerten.

## 120 Ausreißer

Eine andere statistische Methode könnte den Verdacht auf Fälschung jedoch erhärten. Mebane verwendete Regressionsmodelle, um die Ergebnisse der diesjährigen Wahl mit den Ergebnissen der Wahlgänge im Jahr 2005 in Beziehung zu setzen, bei denen Ahmadinejad gegen Akbar Hashemi Rafsanjani und fünf weitere Kandidaten angetreten war. Er entwickelte ein Modell, das aufgrund der Resultate von 2005 die Resultate von 2009 prognostiziert. Bei der Analyse von 320 Wahlkreisen, die sich einander zuordnen ließen, identifizierte das Modell nicht weniger als 120 Ausreißer, bei denen die Stimmenzahl für Ahmadinejad signifikant höher lag, als aufgrund der früheren Resultate hätte erwartet werden sollen.

Natürlich ist auch diese Analyse keineswegs eindeutig. Eine andere Interpretation der Daten könnte nämlich sein, dass Ahmadinejad die Wahl trotz allen Zweifeln tatsächlich haushoch gewonnen hat. Mebane unterstreicht, dass statistische Modelle für sich alleine gesehen höchstens auf fragwürdige Resultate hindeuten können. Um vermutete Fälschung nachzuweisen, müssten die Wahlzettel und die Listen der Wahllokale selber untersucht werden, sagte er.

## Lernaktivität zum Benford-Gesetz basierend auf selbsterhobenen Daten

Wir haben in dieser Zeitschrift schon mehrfach Aufsätze zum Benfordschen Gesetz publiziert, zuletzt im Vorgängerheft 3, 2009. Folgende Aktivität demonstriert dieses Gesetz und lässt Schülerinnen und Schüler die „Kraft des Logarithmus“ erfahren, siehe dazu auch Humenberger (2008):

Man nehme eine beliebige zweistellige Zahl, z. B. 17, und suche mittels Suchmaschine im Internet die Anzahl der Seiten, auf denen jeweils die Ziffern 117, 217, 317 bis 917 auftreten.

Von diesen Werten berechne man die relativen Häufigkeiten und trage diese in ein Streudiagramm gegen die Anfangsziffer ein. Dabei stellt man fest, dass die Ziffern keineswegs gleichverteilt sind. In den meisten Fällen liefert eine Funktion der Form  $y = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  eine hervorragende Anpassung,

was genau Benfords Gesetz entspricht. Allerdings gibt es – wen überrascht es bei statistischen Zahlen – auch markante Ausnahmen: Geht man z. B. von der Ziffer 65 aus, so fällt eine besondere Häufigkeit der Zahl 365 auf (warum wohl?), die gar nicht dem Benford-Gesetz entsprechen mag.

### Weitere Literatur

BRADLEY, J. R.; FARNSWORTH, D. L. (2009): Was ist das Benfordsche Gesetz? In: *Stochastik in der Schule* 29 (3).

HUMENBERGER, H. (1996): Das Benford-Gesetz über die Verteilung der ersten Ziffern von Zahlen. In: *Stochastik in der Schule* 16 (3), S. 2–17.

HUMENBERGER, H. (1997): Eine Ergänzung zum Benford-Gesetz – weitere mögliche schulelevante Aspekte. In: *Stochastik in der Schule* 17 (3), 42–48.

HUMENBERGER, H. (2008): Eine elementare Begründung des Benford-Gesetzes. In: *Der Mathematikunterricht*, Heft 1, S. 24–34.

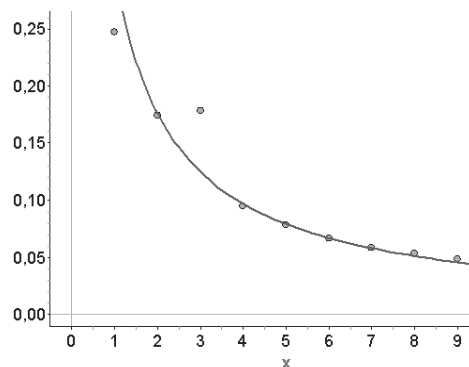
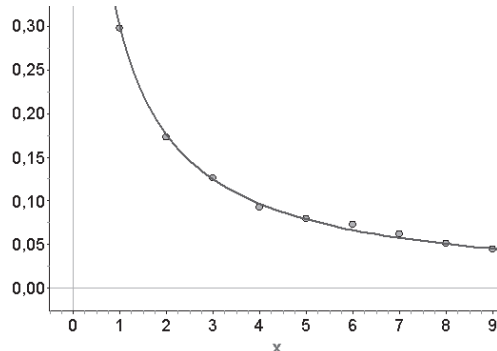
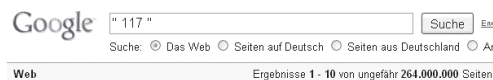


Abb. 1: Google-Suche mit Angabe der Anzahl der Seiten, auf denen die Ziffer 117 vorkommt (oben), Streudiagramm der relativen Häufigkeiten dreistelliger Zahlen mit Endziffern 17 (Mitte) und 65 (unten) sowie Benford Funktion  $y = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

## Leserbrief

Heutzutage würden Simon Newcomb und Frank Benford das BENFORD-Gesetz wohl nicht anhand der Abnutzung von Logarithmentafeln entdecken, sondern vielleicht eher anhand der Abnutzung der Tastatur von Taschenrechnern; zur Illustration schicke ich Ihnen ein entsprechendes Photo des Ziffernfeldes meines Taschenrechners nach mehrjährigem Gebrauch.



Mit freundlichen Grüßen

Gerhard Palme, Leonhard-Wagner-Gymnasium, 86830 Schwabmünchen